III. országos magyar matematikaolimpia
XXX. EMMV
Déva, 2020. február 11–16.

XII. osztály – I. forduló

1. feladat. Adott az $M = \left\{ \frac{2m+1}{2n+1} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{Z} \right\}$ halmaz. Minden $a, c \in M$ és $b, d \in \mathbb{Z}$ esetén értelmezzük a $G = M \times \mathbb{Z}$ halmazon a „$\circ$” műveletet az

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac, b + d)$$

szabállyal.

a) Igazold, hogy az $f\colon G \to \mathbb{Q}^*$, $f((a, b)) = a \cdot 2^b$ függvény bijektív!

b) Igazold, hogy $(G, \circ)$ Abel-csoport!

dr. Bencze Mihály, Brassó

Első megoldás. a) Igazoljuk, hogy f injektív. Tegyük fel, hogy $f((a_1, b_1)) = f((a_2, b_2))$, ahol $b_2 \geq b_1$. Innen következik, hogy $a_1 \cdot 2^{b_1} = a_2 \cdot 2^{b_2}$, tehát

$$\frac{a_1}{a_2} = 2^{b_2 - b_1}.$$

Mivel az $\frac{a_1}{a_2}$ tört felírható két páratlan egész szám arányaként és $b_2 - b_1 \in \mathbb{N}$, innen következik, hogy $2^{b_2 - b_1} = 1$, vagyis $b_1 = b_2$. Ez viszont azt eredményezi, hogy $a_1 = a_2$, tehát f injektív. **(2 pont)**

Igazoljuk, hogy f szürjektív. Legyen $p \in \mathbb{Q}^*$. Meghatározunk egy-egy olyan $q \in M$ és $k \in \mathbb{Z}$ számot, amelyre $q \cdot 2^k = p$. A p racionális szám irreducibilis tört alakban vett felírásából következik, hogy vagy $p = \frac{m \cdot 2^r}{n}$, vagy $p = \frac{m}{n \cdot 2^r}$, ahol m, n páratlan egészek és relatív prímek, valamint $r \in \mathbb{N}$. Ha $p = \frac{m \cdot 2^r}{n}$, akkor $q = \frac{m}{n} \in M$ és $k = r \in \mathbb{Z}$, ha pedig $p = \frac{m}{n \cdot 2^r}$, akkor $q = \frac{m}{n} \in M$ és $k = -r \in \mathbb{Z}$. Tehát az f függvény szürjektív. **(3 pont)**

b) Igazoljuk, hogy f művelettartó. Valóban,

$$f((a, b) \circ (c, d)) = f(ac, b + d) = ac \cdot 2^{b+d} = (a \cdot 2^b) \cdot (c \cdot 2^d) = f((a, b)) \cdot f((c, d)),$$

minden $(a, b), (c, d) \in G$ esetén. **(2 pont)**

Mivel f művelettartó és bijektív, valamint $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ Abel-csoport, következik, hogy $(G, \circ)$ is Abel-csoport és izomorf a $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ csoporttal. **(2 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

Második megoldás a b) alpontra.

- A „$\circ$” művelet belső művelet a G-n, mivel „$\frac{\text{páratlan}}{\text{páratlan}}$” alakú racionális számok szorzata ugyanilyen alakú, valamint az egész számok összege belső művelet a $\mathbb{Z}$-n.
- A „$\circ$” művelet asszociatív, mivel a szorzás asszociatív a $\mathbb{Q}^*$ halmazon, tehát akkor az $M \subseteq \mathbb{Q}$ halmazon is az, valamint az egész számok összeadása asszociatív.
- A „$\circ$” művelet kommutatív, mivel a szorzás kommutatív a $\mathbb{Q}^*$ halmazon, tehát akkor az $M \subseteq \mathbb{Q}$ halmazon is az, valamint az egész számok összeadása kommutatív.
- A „$\circ$” műveletre vonatkozóan $(1,0)$ semleges elem, mivel $(1,0) \in G$, illetve $(a,b) \circ (1,0) = (a \cdot 1, b+0) = (a,b)$ minden $(a,b) \in G$ esetén és a kommutativitást már igazoltuk.
- Ha $a \in M$, akkor $\frac{1}{a}$ is „$\frac{\text{páratlan}}{\text{páratlan}}$” alakú, tehát eleme M-nek, és így az $(a,b) \in G$ inverze a „$\circ$” műveletre nézve az $\left(\frac{1}{a}, -b\right) \in G$ elem. **(4 pont)**

■

Harmadik megoldás a b) alpontra. Igazoljuk, hogy $(M,\cdot)$ részcsoportja a $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ csoportnak. A részcsoportok jellemzési tétele alapján elég belátni, hogy M nem üres, valamint hogy ha $a_1, a_2 \in M$, akkor $\frac{a_1}{a_2} \in M$. Mindkét állítás nyilvánvaló: egyrészt $1 \in M$, másrészt két „$\frac{\text{páratlan}}{\text{páratlan}}$” alakú szám aránya is ugyanilyen alakú.

Felhasználva a „$\circ$” művelet értelmezését, következik, hogy a $(G,\circ)$ algebrai struktúra az $(M,\cdot)$ és $(\mathbb{Z},+)$ Abel-csoportok direkt (Descartes) szorzata, tehát Abel-csoport. **(4 pont)**

■

2. feladat. Határozd meg az $f\colon \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\cos x(1-\sin 2x)}$$

függvény primitív függvényeit!

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Első megoldás. A következő átalakításokat végezhetjük el:

$$\frac{1}{\cos x(1-\sin 2x)} = \frac{1}{\cos x} + \frac{2\sin x}{1-\sin 2x} = \frac{1}{\cos x} + \frac{2\sin x}{(\sin x - \cos x)^2}. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Ez alapján a kiszámolandó integrál felbontható az $I = I_1 + I_2$ összegre, ahol

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int -\frac{\cos x}{\sin^2 x - 1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| + \mathcal{C}_1 \\ &= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right) + \mathcal{C}_1, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right), \end{aligned} \quad \textbf{(2 pont)}$$

valamint $I_2 = 2 \cdot \displaystyle\int \frac{\sin x}{(\sin x - \cos x)^2}\,\mathrm{d}x$. Vezessük be az

$$F = \int \frac{\sin x}{(\sin x - \cos x)^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{és} \quad G = \int \frac{\cos x}{(\sin x - \cos x)^2}\,\mathrm{d}x \qquad (\textbf{1 pont})$$

jelöléseket. Innen következik, hogy

$$\begin{aligned} F - G &= \int \frac{1}{\sin x - \cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{1 - \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1}{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1}\right| + \mathcal{C}_2 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)} + \mathcal{C}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right) + \mathcal{C}_2, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right), \qquad (\textbf{1 pont}) \end{aligned}$$

valamint

$$F + G = \int \frac{(\sin x - \cos x)'}{(\sin x - \cos x)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sin x - \cos x} + \mathcal{C}_3, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right). \qquad (\textbf{1 pont})$$

Az előbbi összefüggések alapján írhatjuk, hogy

$$I_2 = 2F = (F - G) + (F + G) = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right) - \frac{1}{\sin x - \cos x} + \mathcal{C}, \qquad (\textbf{1 pont})$$

tehát

$$I = I_1 + I_2 = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right) - \frac{1}{\sin x - \cos x} + \mathcal{C}, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right).$$

(**1 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■

Második megoldás. Alkalmazzuk a $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$ helyettesítést. (**1 pont**)

Innen következik, hogy a kiszámolandó integrál

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\left(\frac{2t-1+t^2}{1+t^2}\right)^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\int \frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)(t^2+2t-1)^2}\,\mathrm{d}t. \qquad (\textbf{2 pont}) \end{aligned}$$

Az egyenlő együtthatók módszerét alkalmazva írhatjuk, hogy

$$\frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)(t^2+2t-1)^2} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t-1+\sqrt{2}} + \frac{D}{(t-1+\sqrt{2})^2} + \frac{E}{t-1-\sqrt{2}} + \frac{F}{(t-1-\sqrt{2})^2},$$

(**1 pont**)

ahonnan a számolások elvégzése után az

$$A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2},\ C = \frac{1}{2\sqrt{2}},\ D = \frac{-2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}},\ E = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ \text{ és } \ F = \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \qquad (\textbf{3 pont})$$

együtthatókhoz jutunk. Tehát

$$I = -\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right| + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right| - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}\right| - \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}\right| + \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}+\mathcal{C},\quad \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right).$$ **(2 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

Harmadik megoldás. Legyen

$$I = \int \frac{1}{\cos x(1-\sin 2x)}\,\mathrm{d}x.$$

A $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
I &= \int\left(\frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}\left(1-2\frac{1-t^2}{1+t^2}\frac{2t}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = \int\frac{2(t^2+1)^2}{(1-t^2)((t^2+1)^2-4t(1-t^2))}\,\mathrm{d}t\\
&= 2\int\frac{(t^2+1)^2-4t(1-t^2)+4t(1-t^2)}{(1-t^2)((t^2+1)^2-4t(1-t^2))}\,\mathrm{d}t = 2\int\left(\frac{1}{1-t^2}+\frac{4t}{(t^2+1)^2-4t(1-t^2)}\right)\mathrm{d}t\\
&= 2\int\left(\frac{1}{1-t^2}+\frac{4t}{(t^2+2t-1)^2}\right)\mathrm{d}t = 2\int\left(\frac{1}{1-t^2}+\frac{4t}{((t+1)^2-2)^2}\right)\mathrm{d}t\\
&= 2\int\left(\frac{1}{1-t^2}+\frac{4(t+1)}{((t+1)^2-2)^2}-\frac{4}{((t+1)^2-2)^2}\right)\mathrm{d}t\\
&= \int\frac{2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t + 4\int\frac{((1+t)^2)'}{((1+t)^2-2)^2}\,\mathrm{d}t - 8\int\frac{1}{((t+1)^2-2)^2}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$ **(4 pont)**

Mivel $t\in(0,1)$, ezért

$$I = \ln\frac{1+t}{1-t} - \frac{4}{(t+1)^2-2} - 8\int\frac{1}{((t+1)^2-2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

A következőkben kiszámoljuk a $J = \displaystyle\int\frac{1}{(u^2-2)^2}\,\mathrm{d}u$ integrált. Vegyük észre, hogy

$$\int\frac{1}{u^2-2}\,\mathrm{d}u = \int\frac{u^2-2}{(u^2-2)^2}\,\mathrm{d}u = \int\frac{u^2}{(u^2-2)^2}\,\mathrm{d}u - 2J.$$ **(1 pont)**

Innen következik, hogy

$$\begin{aligned}
J &= \frac{1}{2}\int\frac{u^2}{(u^2-2)^2}\,\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\int\frac{1}{u^2-2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\int\frac{(u^2)'}{(u^2-2)^2}u\,\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\int\frac{1}{u^2-2}\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{4}\frac{u}{2-u^2} + \frac{1}{4}\int\frac{1}{u^2-2} - \frac{1}{2}\int\frac{1}{u^2-2}\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{4}\frac{u}{2-u^2} - \frac{1}{4}\int\frac{1}{u^2-2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{8}\left(\frac{2u}{2-u^2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2}+u}\right|\right)+\mathcal{C}.
\end{aligned}$$ **(3 pont)**

A fentiek alapján

$$I = \ln\frac{1+t}{1-t} - \frac{4}{(t+1)^2-2} - \frac{2(t+1)}{2-(t+1)^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-t-1}{\sqrt{2}+t+1}\right| + \mathcal{C}$$

$$= \frac{2t-2}{(t+1)^2-2} + \ln\frac{1+t}{1-t} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}-1-t}{\sqrt{2}+1+t} + \mathcal{C}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Hivatalból **(1 pont)**

■

3. feladat. Adott az $a < 1$ valós szám. Határozd meg az összes olyan x, y, z valós számot, amelyekre

$$x + y + z = \frac{3(a+1)}{2}, \quad xy + yz + zx = 3a$$

és az xyz értéke a lehető legkisebb! *dr. Bencze Mihály, Brassó*

Megoldás. Tekintsük az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(t) = (t-x)(t-y)(t-z)$$

harmadfokú függvényt. **(2 pont)**
Írhatjuk, hogy

$$f(t) = t^3 - (x+y+z)t^2 + (xy+yz+zx)t - xyz = t^3 - \frac{3(a+1)}{2}t^2 + 3at - xyz,$$

így $f'(t) = 3t^2 - 3(a+1)t + 3a = 3(t-a)(t-1)$. **(1 pont)**
A függvény változási táblázata

t	$-\infty$			a				1			$+\infty$
$f'(t)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$+\infty$.

(1 pont)

Kiszámoljuk az $f(a)$-t és az $f(1)$-et:

$$f(a) = a^3 - \frac{3(a+1)}{2}\cdot a^2 + 3a^2 - xyz = \frac{a^3(3-a)}{2} - xyz,$$

$$f(1) = 1 - \frac{3(a+1)}{2} + 3a - xyz = \frac{3a-1}{2} - xyz. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel az x, y, z valós számok f-nek gyökei, ezért az egyik a $(-\infty, a]$ intervallumban van, a másik az $[a, 1]$-ben, a harmadik pedig az $[1, +\infty)$-ben. Tehát $f(a) \geq 0$ és $f(1) \leq 0$, vagyis

$$\frac{a^2(3-a)}{2} \geq xyz \geq \frac{3a-1}{2}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Innen következik, hogy ahhoz, hogy xyz minimális legyen, kell teljesülnie az $f(1) = 0$ feltételnek, vagyis az x, y, z közül kettő egyenlő kell legyen 1-gyel. A szimmetria miatt feltételezhetjük, hogy

$y = z = 1$. Innen következik, hogy $x = \dfrac{3a-1}{2}$, ami kisebb a-nál, mert $a < 1$. **(1 pont)**
Összegezve a fenti eredményeket, a megoldáshalmaz

$$M = \left\{ \left(\frac{3a-1}{2}, 1, 1 \right), \left(1, \frac{3a-1}{2}, 1 \right), \left(1, 1, \frac{3a-1}{2} \right) \right\}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Hivatalból **(1 pont)**

■

4. feladat. A $(G, \cdot)$ csoportban teljesülnek a következő feltételek:

a) a G elemeinek száma p^n, ahol p prímszám és $n \geq 2$ természetes szám;

b) ha H_1 és H_2 olyan részcsoportjai a G-nek, amelyekre $|H_1| = |H_2|$, akkor $H_1 = H_2$.

Igazold, hogy G-ben van olyan elem, amelynek a rendje p^n.

Baja Zsolt, Kolozsvár
Lukács Andor, Kolozsvár
Tőtős György, Kolozsvár

Megoldás. Tegyük fel, hogy nem létezik olyan $x \in G$, amelyre $\operatorname{ord}(x) = p^n$. Innen Lagrange tétele alapján következik, hogy minden $x \in G$ esetén $\operatorname{ord}(x) = p^k$ alakú, valamilyen $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ értékre. **(2 pont)**
Legyen

$$A_k = \{x \in G \mid \operatorname{ord} x = p^k\}, \quad \forall k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Mivel $G = \bigcup\limits_{k=0}^{n-1} A_k$ következik, hogy

$$|G| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |A_k|. \tag{1}$$

(2 pont)

Legyen $x_0 \in G$ úgy, hogy $\operatorname{ord}(x_0) = p^k$. Ha létezik $y \in G$ úgy, hogy $\operatorname{ord}(y) = \operatorname{ord}(x_0)$, akkor

$$\{x_0, x_0^2, \ldots, x_0^{p^k}\} \quad \text{és} \quad \{y, y^2, \ldots, y^{p^k}\} \qquad \textbf{(2 pont)}$$

ugyanannyi elemű részcsoportjai a G-nek, tehát a b) feltétel alapján megegyeznek. Ez viszont azt jelenti, hogy $y \in \{x_0, x_0^2, \ldots, x_0^{p^k}\}$. Innen következik, hogy

$$A_k = \{x \in G \mid \operatorname{ord}(x) = \operatorname{ord}(x_0)\} \subseteq \{x_0, x_0^2, \ldots, x_0^{p^k}\}, \qquad \textbf{(2 pont)}$$

vagyis $|A_k| \leq p^k$. Felhasználva az (1) összefüggést, következik, hogy

$$|G| \leq \sum_{k=0}^{n-1} p^k = \frac{p^n - 1}{p - 1} \leq p^n - 1 < p^n = |G|,$$

ami ellentmondás. Tehát létezik olyan $x \in G$, amelyre $\operatorname{ord}(x) = p^n$. **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■