MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII | INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HUNEDOARA | III. OMMO XXX. EMMV

III. országos magyar matematikaolimpia
XXX. EMMV
Déva, 2020. február 11–16.

VIII. osztály

1. feladat. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$(2x^2 - 2x + 3)(45y^2 - 30y + 41) = 90.$$

dr. Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. A megadott egyenlet ekvivalens az

$$\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\right]\cdot\left[\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{5}\right]=1 \qquad \textbf{(3 pont)}$$

egyenlettel. Mivel minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\geq\frac{5}{4} \quad \text{és} \quad \left(y-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{5}\geq\frac{4}{5}, \qquad \textbf{(2 pont)}$$

ezért minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\right]\cdot\left[\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{5}\right]\geq 1, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

és egyenlőség akkor és csak akkor állhat fent, ha $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0$ és $\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=0$. **(1 pont)**
Innen következik, hogy az egyenletnek egy megoldása van:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{3}. \end{cases} \qquad \textbf{(1-1 pont)}$$

Hivatalból **(1 pont)**

■

2. feladat. Igazold, hogy

a) $1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}=\dfrac{a^n-1}{a-1}$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ és $a \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ esetén;

b) $2020^{2020}-1$ osztható 2019-cel;

c) $\dfrac{2020^{2020}-1}{2019}$ nem teljes négyzet!

Kovács Bálint, Székelyudvarhely

Megoldás. a) Írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} S &= 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} \\ a \cdot S &= \phantom{1 + {}} a + a^2 + \cdots + a^{n-1} + a^n. \end{aligned} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Az alsó egyenlőségből kivonva a felső egyenlőség megfelelő oldalait, azt kapjuk, hogy $S(a-1) = a^n - 1$ és így $S = \dfrac{a^n - 1}{a - 1}$. **(1 pont)**

b) Alkalmazzuk az a) alpontban bizonyított egyenlőséget $a = n = 2020$ esetén. **(1 pont)**
Ekkor írhatjuk, hogy

$$\frac{2020^{2020} - 1}{2019} = 1 + 2020 + \cdots + 2020^{2019}, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

ahonnan

$$2020^{2020} - 1 = 2019(1 + 2020 + \cdots + 2020^{2019}),$$

vagyis $2020^{2020} - 1$ osztható 2019-cel. **(1 pont)**

c) A reductio ad absurdum módszerét alkalmazzuk. Legyen

$$S = \frac{2020^{2020} - 1}{2019} = 1 + 2020 + \cdots + 2020^{2019}$$

és tételezzük fel, hogy S teljes négyzet. Mivel S páratlan, ezért létezik $k \in \mathbb{Z}$ úgy, hogy

$$S = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4\underbrace{k(k+1)}_{\vdots 2} + 1. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Ebből következik, hogy

$$2020 + 2020^2 + \cdots + 2020^{2019} = 2020(1 + 2020 + \cdots + 2020^{2019})$$

osztható 8-cal, ami ellentmondás, mert $2020 = 4 \cdot 505$ és $1 + 2020 + \cdots + 2020^{2019}$ páratlan.
(2 pont)

Hivatalból **(1 pont)**

■

3. feladat. Bűvös piramist építenek 1 cm oldalélű kockákból. Ennek minden szintje négyzet alakú és a szintek rendre n^2, $(n-1)^2$, $\ldots$, 3^2, 2^2, 1^2 darab kockát tartalmaznak. Miután egymáshoz rögzítik az építőelemeket, egy 2352 cm^2 teljes felszínű testet nyernek. Hány szintes az elkészített piramis?

Hodgyai Edit, Micske

Megoldás.
Az n szintű piramis alakú test vízszintes oldallapjainak az összterülete $2n^2$ cm^2, **(2 pont)**
függőleges oldallapjainak az összterülete pedig

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + \cdots + 4 \cdot n = 4(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = 2(n+1)n. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Innen következik, hogy az elkészült piramis felszíne

$$2n^2 + 2(n+1)n = 2n^2 + 2n^2 + 2n = 4n^2 + 2n = 2n(2n+1). \qquad \textbf{(2 pont)}$$

A megadott feltétel alapján innen azt kapjuk, hogy $2n(2n+1) = 2352$. Viszont a 2352 szám két egymásutáni természetes szám szorzatára egyedül csak a $2352 = 48 \cdot 49$ módon bontható fel.

(**2 pont**)

Ez alapján $2n = 48$, vagyis $n = 24$. Tehát 24 szintes a 2352 cm^2 felületű piramis. (**1 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■

4. feladat. Az α, β és γ három páronként egymásra merőleges sík, melyek az O pontban metszik egymást, a teret 8 térnyolcadra osztva. Legyen $\mathcal{A}$ azon pontok halmaza a térben, melyek távolsága az α, β és γ síktól rendre 8 cm, 6 cm és 4 cm, valamint $\mathcal{B}$ azon pontok halmaza a térben melyek távolsága az α, β és γ síktól rendre 12 cm, 9 cm és 6 cm.

a) Igazold, hogy létezik, olyan $P \in \mathcal{A}$ és $Q \in \mathcal{B}$, amelyre az O, P és Q pontok kollineárisak!

b) Hány olyan páronként egymással nem egybevágó téglatest létezik, amely rendelkezik az alábbi két tulajdonsággal:

   - lapjai rendre párhuzamosak az α, β, γ síkok valamelyikével;
   - van olyan testátlója, amelynek az egyik végpontja az $\mathcal{A}$, a másik pedig a $\mathcal{B}$ halmaz eleme?

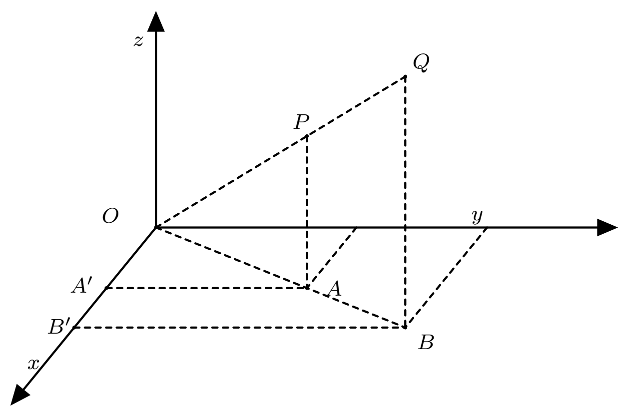
c) Mennyi lehet a PQ szakasz hossza, ha $P \in \mathcal{A}$, $Q \in \mathcal{B}$ és mindkét pont ugyanabban a térnyolcadban helyezkedik el?

Császár Sándor, Csíkmadaras

Megoldás. Vezessük be az $Ox = \beta \cap \gamma$, $Oy = \alpha \cap \gamma$ és $Oz = \alpha \cap \beta$ jelöléseket.

a) A $P \in \mathcal{A}$, $Q \in \mathcal{B}$ és O pontok csak akkor lehetnek kollineárisak, ha a P és Q pontok vagy ugyanabban, vagy ellentétes térnyolcadban vannak. (**1 pont**)

   Vizsgáljuk azt az esetet, amikor P és Q ugyanabban a térnyolcadban vannak.



Legyen A és B a P és Q pont γ síkra eső vetülete, valamint A' és B' az A, illetve B pont Ox-re eső vetülete. Először igazoljuk, hogy O, A és B kollineáris. Ennek feltétele, hogy $\widehat{A'OA} = \widehat{B'OA}$. Az $AA'O$ és $BB'O$ derékszögű háromszögekben

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{A'O}{B'O},$$

tehát a háromszögek hasonlók, ahonnan következik, hogy O, A és B kollineáris. **(2 pont)**

Mivel PA és QB merőlegesek a γ síkra, ezért A, B, P, Q és O ugyanarra a síkra illeszkednek. Ahhoz, hogy O, P és Q kollineáris legyen, elég igazolni, hogy $\widehat{AOP} = \widehat{BOQ}$. Az AOP és BOQ derékszögű háromszögekben

$$\frac{OA}{OB} = \frac{10}{15} = \frac{4}{6} = \frac{PA}{QB},$$

így a háromszögek hasonlók, tehát O, P és Q kollineáris. **(2 pont)**

Ha P és Q ellentétes térnyolcadban van, akkor a P, Q és O pontok kollinearitása visszavezetődik, a P, Q' és O pontok kollinearitására, ahol Q' a Q pont O szerinti szimmetrikusa.

b) Legyen $P \in \mathcal{A}$ és $Q \in \mathcal{B}$. Megszerkesztjük azt a téglatestet, amelynek oldalai rendre párhuzamosak az α, β, γ síkok, valamelyikével és amelynek egyik testátlója PQ. Legyen rendre a, b és c a megszerkesztett téglatest Ox-el, Oy-nal, illetve Oz-vel párhuzamos oldalainak hossza.

Felírhatjuk, hogy

$$a = |(\pm 8) - (\pm 12)|, \quad b = |(\pm 6) - (\pm 9)| \quad \text{és} \quad c = |(\pm 4) - (\pm 6)|,$$

ahonnan

$$a \in \{4, 20\}, \quad b \in \{3, 15\} \quad \text{és} \quad c \in \{2, 10\}.$$

Ez alapján 8 darab páronként nem egybevágó téglatest létezik, ezek méretei rendre

$$(4,3,2);\ (4,3,10);\ (4,15,2);\ (4,15,10);\ (20,3,2);\ (20,3,10);\ (20,15,2);\ (20,15,10).$$

(2 pont)

c) A PQ egy olyan téglatestnek a testátlója, amelynek az élhosszai rendre $12 - 8 = 4$, $9 - 6 = 3$, $6 - 4 = 2$. Ekkor $PQ = \sqrt{16 + 9 + 4} = \sqrt{29}$. **(2 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■