III. országos magyar matematikaolimpia
XXX. EMMV
Déva, 2020. február 11–16.

XI-XII. osztály – II. forduló

1. feladat. Ha egy háromszög oldalhosszai $a, b, c > 0$ és a területe T, akkor igazold, hogy

$$T \leq \frac{\sqrt{3}}{12}(ab + bc + ca),$$

és egyenlőség csak az $a = b = c$ esetben áll fenn! *Szilágyi Zsolt, Kolozsvár*

Első megoldás. A szokásos jelöléseket használva, a $T = \dfrac{bc \sin A}{2}$, $T = \dfrac{ca \sin B}{2}$, $T = \dfrac{ab \sin C}{2}$ terület-képletek segítségével a feladatban szereplő egyenlőtlenség rendre a következő formákba írható:

$$\begin{aligned} T &\leq \frac{\sqrt{3}}{12}(ab + bc + ca), \\ T &\leq \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{2T}{\sin C} + \frac{2T}{\sin A} + \frac{2T}{\sin B}\right), \\ \frac{6}{\sqrt{3}} &\leq \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}. \end{aligned} \tag{1}$$

(2 pont)

Mivel $A, B, C \in (0, \pi)$, ezért $\sin A, \sin B, \sin C > 0$, így alkalmazhatjuk a számtani és harmonikus közepek közti egyenlőtlenséget:

$$\frac{\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}}{3} \geq \frac{3}{\sin A + \sin B + \sin C}. \tag{2}$$

(2 pont)

Ugyanakkor, mivel a szinuszfüggvény konkáv a $(0, \pi)$ intervallumon, a Jensen-egyenlőtlenség értelmében $\sin\left(\dfrac{A + B + C}{3}\right) \geq \dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}$, ahonnan **(3 pont)**

$$\frac{3}{\sin A + \sin B + \sin C} \geq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}. \tag{3}$$

A (2) és (3) összefüggésekből következik, hogy $\dfrac{1}{\sin A} + \dfrac{1}{\sin B} + \dfrac{1}{\sin C} \geq \dfrac{6}{\sqrt{3}}$. **(1 pont)**

Mivel a szinuszfüggvény a $(0, \pi)$ intervallumon szigorúan konkáv, ezért a Jensen-egyenlőtlenségben pontosan akkor van egyenlőség, ha $A = B = C$ vagyis a háromszög egyenlő oldalú, és ebben az esetben a (2)-es egyenlőtlenségben is teljesül az egyenlőség. **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

Megjegyzés. Az (1)-es egyenlőtlenség a következőképpen is bizonyítható:

Tekintsük az $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$ függvényt. Ekkor $f'(x)=-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$ és

$$f''(x)=\frac{\sin x\cdot\sin^2 x+\cos x\cdot 2\sin x\cdot\cos x}{\sin^4 x}=\frac{\sin^2 x+2\cos^2 x}{\sin^3 x}=\frac{1+\cos^2 x}{\sin^3 x}>0,$$

minden $x\in(0,\pi)$ esetén, tehát f konvex a $(0,\pi)$ intervallumon. Így a Jensen-egyenlőtlenség alapján

$$\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}\geq f\left(\frac{x+y+z}{3}\right),\quad \forall x,y,z\in(0,\pi).$$

Az $x=A$, $y=B$, $z=C$ választásra $\dfrac{f(A)+f(B)+f(C)}{3}\geq f\left(\dfrac{A+B+C}{3}\right)$, azaz

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\geq 3\cdot f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{6}{\sqrt{3}}.$$

Második megoldás. A háromszög területére felírjuk Héron-képletet:

$$T=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)},\quad \text{ahol } s=\frac{a+b+c}{2}.$$

A gyök alatt szereplő szorzótényezőket az

$$s=\frac{(b+c)+a}{2},\ s-a=\frac{(b+c)-a}{2},\ s-b=\frac{a-(b-c)}{2},\ s-c=\frac{a+(b-c)}{2},$$

alakba írva a rövidített számítási képletek alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
s(s-a)(s-b)(s-c)&=\frac{(b+c)^2-a^2}{4}\cdot\frac{a^2-(b-c)^2}{4}\\
&=\frac{1}{4^2}\left[(b+c)^2\cdot a^2-(b+c)^2\cdot(b-c)^2-a^4+a^2\cdot(b-c)^2\right]\\
&=\frac{1}{4^2}\left[(b^2+2bc+c^2)\cdot a^2-((b+c)\cdot(b-c))^2-a^4+a^2\cdot(b^2-2bc+c^2)\right]\\
&=\frac{1}{4^2}\left[2(b^2+c^2)\cdot a^2-(b^2-c^2)^2-a^4\right]\\
&=\frac{1}{4^2}\left(2c^2a^2+2a^2b^2+2b^2c^2-b^4-c^4-a^4\right).
\end{aligned}$$

Mivel $a,b,c,T>0$, ezért a feladatbeli egyenlőtlenség átírható

$$T\leq\frac{\sqrt{3}}{12}(ab+bc+ca)\iff T^2\leq\frac{3}{12^2}(ab+bc+ca)^2$$

alakba. Felhasználva az előbbi számolásokat a következő egyenlőtlenséghez jutunk:

$$\frac{1}{4^2}\left(2c^2a^2+2a^2b^2+2b^2c^2-b^4-c^4-a^4\right)\leq\frac{1}{3\cdot 4^2}\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2bc+2b^2ca+2c^2ab\right),$$

Beszorozva $3\cdot 4^2$-tel és egy oldalra hozva a tagokat kapjuk, hogy

$$3a^4+3b^4+3c^4-5a^2b^2-5b^2c^2-5c^2a^2+2a^2bc+2b^2ca+2c^2ab\geq 0.$$

Az a^4, b^4, c^4 tagok felhasználásával teljes négyzeteket alakítunk ki, majd a maradék tagokkal is hasonlóan cselekszünk. Ezt a következő csoportosításokkal érjük el:

$$\left[3a^4+3b^4+3c^4-3a^2b^2-3b^2c^2-3c^2a^2\right]-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2+2a^2bc+2b^2ca+2c^2ab\geq 0,$$
$$\frac{3}{2}\left[(a^4-2a^2b^2+b^4)+(b^4-2b^2c^2+c^4)+(c^4-2c^2a^2+a^4)\right]-(a^2b^2+b^2c^2-2b^2ca)$$
$$-(b^2c^2+c^2a^2-2c^2ba)-(c^2a^2+a^2b^2-2a^2bc)\geq 0,$$
$$\frac{3}{2}\left[(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\right]-(ab-bc)^2-(bc-ca)^2-(ca-ab)^2\geq 0.$$

Az így kapott teljes négyzeteket a következőképpen csoportosítjuk:

$$\frac{1}{2}\left[(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\right]+[(a^2-b^2)^2-(bc-ca)^2]+[(b^2-c^2)^2-(ca-ab)^2]+$$
$$+[(c^2-a^2)^2-(ab-bc)^2]\geq 0,$$
$$\frac{1}{2}\left[(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\right]+(a-b)^2\cdot[(a+b)^2-c^2]+(b-c)^2\cdot[(b+c)^2-a^2]+$$
$$+(c-a)^2\cdot[(c+a)^2-b^2]\geq 0.$$

Összegezve az eddigi számításokat, a $T\leq\frac{\sqrt{3}}{12}(ab+bc+ac)$ egyenlőtlenség egyenértékű a következővel

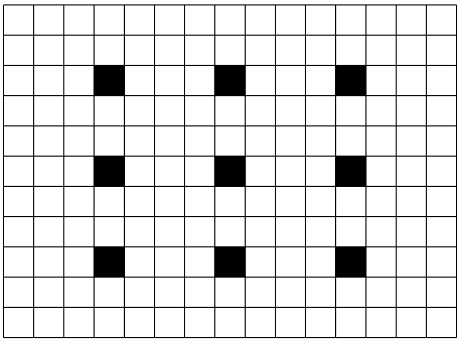
$$\frac{1}{2}\left[(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\right]+(a-b)^2\cdot[(a+b)^2-c^2]+(b-c)^2\cdot[(b+c)^2-a^2]+$$
$$+(c-a)^2\cdot[(c+a)^2-b^2]\geq 0. \tag{1}$$

Így elég belátni, hogy $(a+b)^2-c^2\geq 0$, $(b+c)^2-a^2\geq 0$, $(c+a)^2-b^2\geq 0$, amiket a háromszög-egyenlőtlenségek négyzetre emelésével kapunk:

$$a+b\geq c \iff (a+b)^2\geq c^2 \iff (a+b)^2-c^2\geq 0,$$
$$b+c\geq a \iff (b+c)^2\geq a^2 \iff (b+c)^2-a^2\geq 0,$$
$$c+a\geq b \iff (c+a)^2\geq b^2 \iff (c+a)^2-b^2\geq 0.$$

Az (1)-es egyenlőtlenségben az egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha az összeg minden tagja nulla. Innen következik, hogy $a=b=c$. ■

2. feladat. Egy $(3n+2)\times(4n+3)$-es, egységnyi négyzetekből álló táblázat minden harmadik sorának és minden negyedik oszlopának kereszteződésében található négyzetét feketére festettük. Hányféleképpen osztható fel a táblázat a rácsvonalak mentén egyenesekkel úgy, hogy minden darabban legyen legalább egy fekete négyzet? Az egyben hagyott táblázat is egy felosztásnak számít. A kifestett tábla $n = 3$ esetén a következő.



Dávid Géza, Székelyudvarhely

Megoldás. Válasszunk ki egy olyan sort, amelyben fekete négyzetek vannak. A felosztás bármely függőleges vágása, valamelyik két szomszédos fekete négyzet között kell áthaladjon. Ugyanakkor a kiválasztott sorban lévő bármely két szomszédos fekete négyzet között legtöbb egy vágás lehet. Ezért vagy nincs vágás, vagy pedig egy vágás van a két négyzet közötti négy darab rácsvonal valamelyike mentén, ami összesen öt lehetőség. **(3 pont)**
Két szomszédos fekete négyzetet az adott sorban $(n-1)$-féleképpen választhatunk ki, ezért a függőleges vágásokra 5^{n-1} lehetőség van. **(3 pont)**
Analóg módon a vízszintes vágásokra 4^{n-1} lehetőség van. **(2 pont)**
Így a táblázat felosztására $5^{n-1}\cdot 4^{n-1} = 20^{n-1}$ lehetőség van. **(1 pont)**
Hivatalból **(1 pont)**
■

3. feladat. Ha $p > 3$ prímszám, akkor mennyi lehet $(p-1)$ darab számtani haladványban álló egész szám szorzatának a p-vel való osztási maradéka?

Kovács Bálint, Székelyudvarhely

Megoldás. Legyen a $p-1$ db szám növekvő sorrendben

$$x,\ x+r,\ x+2r,\ \ldots,\ x+(p-2)r,$$

ahol $x \in \mathbb{Z}$ és $r \in \mathbb{N}$.

Ha a haladvány valamelyik tagja osztható p-vel, akkor a szorzat p-vel való osztási maradéka 0. **(2 pont)**

Ha egyik tag sem osztható p-vel, akkor két esetet különböztetünk meg.

- Ha p osztja az r-et, akkor a szorzat p-vel való osztási maradéka egyenlő x^{p-1}-nek a p-vel való osztási maradékával. Mivel egyik tag sem osztható p-vel, így x se, tehát $(p, x) = 1$. A kis Fermat-tétel szerint x^{p-1}-nek a p-vel való osztási maradéka 1. **(3 pont)**

- Ha p nem osztja az r-et, akkor $(p, r) = 1$. Megvizsgáljuk, hogy a haladvány két különböző tagjának lehet-e azonos a p-vel való osztási maradéka.

  Ha $x + ir \equiv x + jr \pmod{p}$, akkor $r(i - j) \equiv 0 \pmod{p}$.

  Mivel $(p, r) = 1$, ezért $(i - j) \equiv 0 \pmod{p}$, de $0 \leq i, j \leq p - 2$ és így $i = j$.

  Azt kaptuk, hogy a $p - 1$ tagból álló haladvány tagjainak a p-vel osztási maradékai páronként különbözőek. Mivel egyik tag sem osztható p-vel, ezért a tagok p-vel való osztási maradékainak halmaza pontosan
  $$\{1; 2; \dots ; p - 1\}.$$
  Így a tagok szorzatának p-vel való osztási maradéka egyenlő a $(p - 1)!$-nak a p-vel való osztási maradékával, ami a Wilson-tétel alapján $p - 1$. (**4 pont**)

Tehát a lehetséges maradékok: $0, 1, p - 1$.Hivatalból (**1 pont**)

■

4. feladat. Egy háromszög köré írt kör sugara 5 cm és az oldalhosszai, centiméterben kifejezve, természetes számok. Mennyi lehet a háromszög területe?

Dávid Géza, Székelyudvarhely
Szilágyi Judit, Kolozsvár

Megoldás. Jelölje $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ a háromszög oldalainak hosszát és tételezzük fel, hogy $a \leq b \leq c$.

A szinusz-tétel értelmében
$$\sin A = \frac{a}{2R} = \frac{a}{10} \in \mathbb{Q}, \qquad \textbf{(1 pont)}$$
a koszinusz-tétel értelmében pedig
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \in \mathbb{Q}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$
Ugyanakkor
$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A = \frac{100 - a^2}{100} \in \mathbb{Q},$$
így létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, amelyre $100 - a^2 = k^2$, ahonnan $100 = a^2 + k^2$. (**1 pont**)
Innen következik, hogy $a = 10$, vagy $(a, k, 10)$ egy olyan pitagoraszi számhármast alkot, amelynek a legnagyobb eleme 10.

Ugyanez a másik két oldalra is fennáll.

Mivel azok a 10-nél kisebb számok, amelyek a 10-zel pitagoraszi számhármast alkotnak csak a 6 és a 8, ezért a háromszög oldalai csak a 6, 8 és 10 számok közül kerülhetnek ki. Ez alapján csak a
$$(6, 6, 6);\ (6, 6, 8);\ (6, 6, 10);\ (6, 8, 8);\ (6, 8, 10);\ (6, 10, 10);\ (8, 8, 8);\ (8, 8, 10);\ (8, 10, 10);\ (10, 10, 10)$$
oldalhosszú háromszögek jöhetnek szóba. (**2 pont**)

Mivel $T = \dfrac{abc}{4R}$ szintén racionális, így az egyenlő oldalú háromszögek kizárhatóak. Valóban, ha $a \in \mathbb{N}^*$, akkor $T = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \notin \mathbb{Q}$. (**1 pont**)

Az (a, a, b) oldalhosszú egyenlő szárú háromszögek esetén, ahhoz, hogy a terület racionális legyen, az alaphoz tartozó magasság is racionális kell legyen. A Pitagorasz-tétel értelmében a $\frac{b}{2}$ és a egy olyan pitagoraszi számhármasban szerepel, amelyben a a legnagyobb elem. Innen következik, hogy a

$$(6,6,8);\ (6,6,10);\ (8,8,6);\ (8,8,10);\ (10,10,6);\ (10,10,8)$$

esetek nem megfelelőek, mert

$$(x,4,6);\ (x,5,6);\ (x,3,8);\ (x,5,8);\ (x,3,10);\ (x,4,10)$$

alakú pitagoraszi számhármasok nem léteznek (a 10-nél kisebb vagy egyenlő számok körében csak a $(3,4,5)$, illetve $(6,8,10)$ pitagoraszi számhármasok léteznek).

Azt kaptuk, hogy a felsorolt tíz lehetőség közül, csak a $(6,8,10)$ oldalú háromszöget kell vizsgálnunk. (**2 pont**)

Ez a háromszög derékszögű, mert $(6,8,10)$ pitagoraszi számhármas. A köréírt körének sugara $R = \dfrac{10}{2} = 5$, oldalhosszai egészek, így teljesíti a feltételeket, területe $T = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24\ \text{cm}^2$. (**1 pont**)
Hivatalból (**1 pont**)

■

5. feladat. Egy 2020×2020-as táblázat minden cellájába tetszőlegesen beírjuk a „ $+$ ”, illetve a „ $-$ ” előjelek valamelyikét. Egy lépésben kiválasztunk egy cellát, majd a cella előjelét megváltoztatjuk, a vele egy sorban és oszlopban levő összes celláéval együtt.
Elérhető, hogy véges lépés után a táblázatban minden előjel egyforma legyen? Válaszodat indokold!

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

Megoldás. Bebizonyítjuk, hogy minden cellában megváltoztatható az előjel anélkül, hogy a többi cellában változna az előjel.

Valóban, válasszuk ki az i. sor és j. oszlop kereszteződésében levő cellát, majd az i. sorban és a j. oszlopban minden cellának pontosan egyszer változtassuk meg az előjelét. (**3 pont**)

Ekkor:

- Az i. sor és j. oszlop kereszteződésében levő cella előjele $2020 + 2019 = 4039$-szer változik, azaz eredeti állapotához képest megváltozik. (**2 pont**)

- Az i. sorban, illetve j. oszlopban levő összes többi cella előjele 2020-szor változik, azaz eredeti állapotához képest nem változik. (**2 pont**)

- Minden más cellában az előjel kétszer változik, egyszer amikor az i. sorban és a vele egy oszlopban levő előjelet változtatjuk, egyszer pedig amikor a j. oszlopban és a vele egy sorban levő előjelet változtatjuk. Tehát ezekben a cellákban sem változnak az előjelek az eredeti állapotukhoz képest. (**2 pont**)

Tehát az i. sor és j. oszlop kereszteződésében levő cella előjelét megváltoztattuk anélkül, hogy a többi cella előjele változott volna. Ezért elérhető, hogy véges lépésben a táblázatban minden előjel egyforma legyen. Például, ha csak „ + ” előjeleket szeretnénk, akkor az összes „ − ” előjelű cella előjelét szerre megváltoztatjuk.

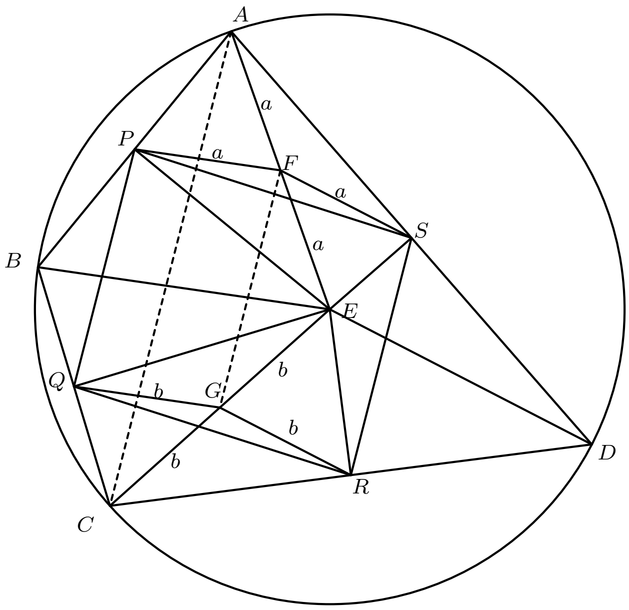
Hivatalból **(1 pont)**

■

6. feladat. Adott egy $ABCD$ körbeírható négyszög és legyen E a négyszög egy olyan belső pontja, amelynek az AB, BC, CD és AD oldalra eső vetülete P, Q, R, illetve S. Igazold, hogy a $PQRS$ négyszög akkor és csakis akkor paralelogramma, ha E az $ABCD$ köré írt kör középpontja!

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

Megoldás. A megoldáshoz tekintsük a következő ábrát.



„$\Longleftarrow$” Ha E a kör középpontja, akkor EP, EQ, ER és ES rendre felezőmerőlegese az AB, BC, CD és DA szakasznak. Ez alapján az ABC háromszögben PQ középvonal, az ACD háromszögben pedig RS középvonal. Így

$$PQ \parallel AC \parallel RS \quad \text{és} \quad PQ = \frac{1}{2} \cdot AC = RS,$$

vagyis $PQRS$ paralelogramma. **(2 pont)**

„$\Longrightarrow$” Mivel $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180°$, ezért az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy $\widehat{BAD}$ nem tompaszög. Vegyük észre, hogy az $APES$ és $EQCR$ négyszög körbeírható.

Az $APES$ köré írható kör F középpontja az AE átló felezőpontja. Ekkor

$$FA = FP = FE = FS = a \quad \text{és} \quad \widehat{PFS} = 2 \cdot \widehat{PAS}. \tag{1}$$

(1 pont)

Az $EQCR$ négyszög köré írható kör G középpontja az EC átló felezőpontja. Ekkor

$$GE = GQ = GC = GR = b \quad \text{és} \quad \widehat{QGR} = 2 \cdot \widehat{QER} = 2 \cdot (180° - \widehat{QCR}). \tag{2}$$

(**1 pont**)

Mivel $ABCD$ körbeírható, ezért $\widehat{BAD}+\widehat{BCD}=180°$, azaz $\widehat{PAS}+\widehat{QCR}=180°$, így az (1)-es és (2)-es összefüggések alapján

$$\widehat{PFS}=\widehat{QGR}, \tag{3}$$

de az FPS és GQR háromszögek egyenlő szárúak, ezért minden megfelelő szögük egyenlő.

(**1 pont**)

Mivel $PQRS$ paralelogramma, ezért

$$PS \parallel QR \quad \text{és} \quad PS = QR,$$

így a (3)-as összefüggés alapján $FPS_\Delta \equiv GQR_\Delta$. (**1 pont**)

Emiatt $FP = GQ$ és $FP \parallel GQ$, így $PQGF$ paralelogramma, azaz

$$PQ \parallel FG \quad \text{és} \quad PQ = FG. \tag{4}$$

Az AEC háromszögben FG középvonal és így

$$FG \parallel AC \quad \text{és} \quad FG = \frac{1}{2}AC. \tag{5}$$

A (4)-es és (5)-ös összefüggésekből következik, hogy

$$PQ \parallel AC \quad \text{és} \quad PQ = \frac{1}{2}AC, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

azaz PQ középvonal az ABC háromszögben. Innen következik, hogy EP az AB szakasz felezőmerőlegese, EQ pedig a BC szakasz felezőmerőlegese. (**1 pont**)

Mivel $ABCD$ körbeírható és E két oldalfelező merőlegesének a metszéspontja, így E az $ABCD$ négyszög köréírt kör középpontja. (**1 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■