III. országos magyar matematikaolimpia
XXX. EMMV
Déva, 2020. február 11–16.

X. osztály – II. forduló

1. feladat. Oldd meg a valós számok halmazán az

$$x \cdot \left(24+3\sqrt{15}\right)^{\lg x}+210=30\cdot\left(15+\sqrt{15}\right)^{\lg x}$$

egyenletet!

dr. Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Ahhoz, hogy az egyenletnek legyen értelme, $x>0$ kell teljesüljön. (**1 pont**)
Mivel $x=10^{\lg x}$, ezért a következő ekvivalens átalakításokat végezhetjük el az egyenleten: (**1 pont**)

$$\begin{aligned}
&10^{\lg x}\cdot(24+3\sqrt{15})^{\lg x}+210=30\cdot(15+\sqrt{15})^{\lg x},\\
&(240+30\sqrt{15})^{\lg x}-30\cdot(15+\sqrt{15})^{\lg x}+210=0, \qquad (\mathbf{1\ pont})\\
&\left[\left(15+\sqrt{15}\right)^2\right]^{\lg x}-30\cdot(15+\sqrt{15})^{\lg x}+210=0,\\
&\left[\left(15+\sqrt{15}\right)^{\lg x}\right]^2-30\cdot(15+\sqrt{15})^{\lg x}+210=0.
\end{aligned}$$

Az $y=\left(15+\sqrt{15}\right)^{\lg x}$ jelöléssel az egyenlet $y^2-30y+210=0$ alakra hozzuk, aminek a gyökei

$$y_1=15+\sqrt{15} \quad \text{és} \quad y_2=15-\sqrt{15}. \qquad (\mathbf{2\ pont})$$

Ezeket a gyököket visszahelyettesítve az y-t megadó összefüggésbe. Az első esetben a

$$\left(15+\sqrt{15}\right)^{\lg x}=15+\sqrt{15} \qquad (\mathbf{1\ pont})$$

összefüggést kapjuk, ahonnan $\lg x=1$, vagyis $x=10$. (**1 pont**)

A második esetben a

$$\left(15+\sqrt{15}\right)^{\lg x}=15-\sqrt{15}$$

összefüggést kapjuk, ahonnan $\lg x=\frac{\lg(15-\sqrt{15})}{\lg(15+\sqrt{15})}$, vagyis $x=10^{\frac{\lg(15-\sqrt{15})}{\lg(15+\sqrt{15})}}$. (**2 pont**)

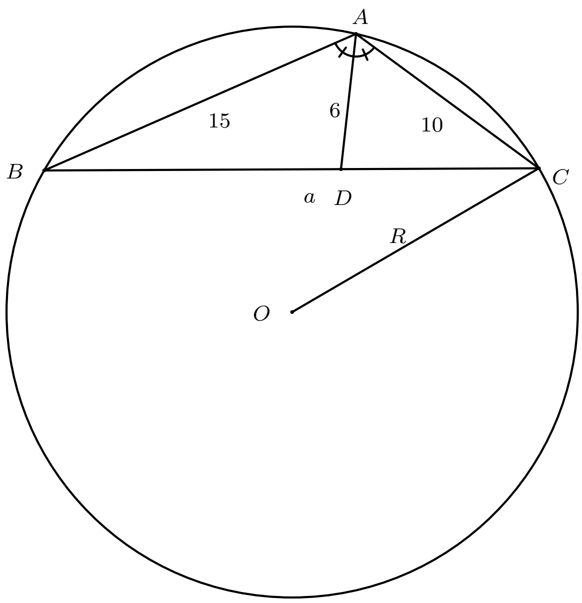
Összefoglalva, a feladatbeli egyenlet megoldásai az $x=10$ és az $x=10^{\frac{\lg(15-\sqrt{15})}{\lg(15+\sqrt{15})}}$.
Hivatalból (**1 pont**)

■

2. feladat. Az ABC háromszögben a $\widehat{BAC}$ szögfelezője a D pontban metszi (BC) oldalt és tudjuk, hogy $AB=15$, $AC=10$, $AD=6$. Számítsd ki az ABC háromszög köré írt kör sugarát!

Mátéfi István, Marosvásárhely
Oláh-Ilkei Árpád, Sepsiszentgyörgy

Első megoldás.



Az A szöghöz tartozó AD szögfelező hosszára vonatkozó $AD = \dfrac{2 \cdot AC \cdot AB}{AC + AB} \cdot \cos \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$ összefüggés alapján $6 = \dfrac{2 \cdot 10 \cdot 15}{10 + 15} \cdot \cos \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$, ahonnan $\cos \dfrac{\widehat{BAC}}{2} = \dfrac{1}{2}$, vagyis $m(\widehat{BAC}) = 120°$. (**3 pont**)

Az ABC háromszög területe

$$T = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC}}{2} = \frac{15 \cdot 10 \cdot \sin 120°}{2} = 75 \cdot \sin 60° = \frac{75\sqrt{3}}{2}.$$ (**2 pont**)

Kiszámítjuk a BC oldal hosszát az ABC háromszögben felírt koszinus-tétel segítségével:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A,$$
$$BC^2 = 15^2 + 10^2 - 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right),$$
$$BC^2 = 475,$$
$$BC = 5\sqrt{19}.$$ (**2 pont**)

Végül kiszámítjuk a köré írt kör sugarát:

$$R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4 \cdot T} = \frac{10 \cdot 15 \cdot 5\sqrt{19}}{4 \cdot \frac{75\sqrt{3}}{2}} = \frac{5\sqrt{57}}{3}.$$ (**2 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■

Második megoldás. Bevezetjük a $BD = x$, $DC = y$ és $m(\widehat{BAD}) = \alpha$. Az ABC háromszögben felírt szögfelező-tétel alapján $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$, ahonnan

$$x = \frac{3}{2}y. \tag{1}$$

(1 pont)

Kifejezzük a $\cos\alpha$-t kétféleképpen. Az ABD háromszögben a koszinus-tétel alapján

$$\cos\alpha = \frac{AB^2 + AD^2 - DB^2}{2 \cdot AB \cdot AD} = \frac{15^2 + 6^2 - x^2}{2 \cdot 6 \cdot 15} = \frac{261 - x^2}{180},$$ **(1 pont)**

és az ACD háromszögben a koszinus-tétel alapján

$$\cos\alpha = \frac{AC^2 + AD^2 - DC^2}{2 \cdot AC \cdot AD} = \frac{10^2 + 6^2 - y^2}{2 \cdot 10 \cdot 6} = \frac{136 - y^2}{120}. \tag{2}$$

(1 pont)

Ezeket egyenlővé téve kapjuk, hogy $\dfrac{261 - x^2}{180} = \dfrac{136 - y^2}{120}$, ahonnan $2x^2 - 3y^2 = 114$. Ebbe behelyettesítve az (1)-es összefüggésben kifejezett x-et kapjuk az $3y^2 = 228$ egyenletet, ahonnan $y = 2\sqrt{19}$ és $x = 3\sqrt{19}$.

Kiszámítjuk az $BC = BD + DC = x + y = 5\sqrt{19}$ oldalhosszat és a (2)-es összefüggés alapján $\cos\alpha = \dfrac{136 - 76}{120} = \dfrac{1}{2}$, vagyis $\alpha = 60°$ és $m(\widehat{BAC}) = 120°$. **(2 pont)**

Az ABC háromszög területe $T = \dfrac{AB \cdot AC \cdot \sin\widehat{BAC}}{2} = 75 \cdot \sin 120° = \dfrac{75\sqrt{3}}{2}$. **(2 pont)**

Végül az ABC háromszög köré írt kör sugara $R = \dfrac{AB \cdot BC \cdot CA}{4T} = \dfrac{5\sqrt{57}}{3}$. **(2 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

3. feladat. Ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ valós számok, $a_1 \geq 1$ és $a_{n+1} \geq a_n + 1$, minden $n \geq 1$ esetén, akkor igazold, hogy

a) $a_n a_{n+1} \geq 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$;

b) $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_{n+1} \geq 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(n - k + 1)a_k$.

dr. Bencze Mihály, Brassó
Vass Ferenc, Szováta

Megoldás. a) Belátjuk az állítást $n = 1$-re.

Mivel $a_1 \geq 1$ és $a_2 \geq a_1 + 1 \geq 2$, ezért $a_1a_2 \geq 2a_1$. **(1 pont)**

Tételezzük, fel hogy $a_ka_{k+1} \geq 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$. Ekkor

$$\begin{aligned} a_{k+1}a_{k+2} &\geq a_{k+1}(a_k + 2) = a_{k+1}a_k + 2a_{k+1} \\ &\geq 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + 2a_{k+1} = 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1}). \end{aligned}$$ **(3 pont)**

A matematikai indukció alapján következik, hogy $a_n a_{n+1} \geq 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$, minden $n \geq 2$ esetén. **(1 pont)**

b) Az a) alpont alapján teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

$$\begin{aligned}
a_1 a_2 &\geq 2a_1 \\
a_2 a_3 &\geq 2(a_1 + a_2) \\
a_3 a_4 &\geq 2(a_1 + a_2 + a_3) \\
&\vdots \\
a_n a_{n+1} &\geq 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n).
\end{aligned}$$ **(2 pont)**

A megfelelő oldalakat összeadva azt kapjuk, hogy

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_n a_{n+1} \geq 2(na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + a_n) = 2\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)a_k.$$ **(2 pont)**

A fenti egyenlőtlenségben egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a_n = n$, minden $n \geq 1$ esetén.
Hivatalból **(1 pont)**

■

4. feladat. Adottak a következő halmazok:

$$\{1\}; \quad \{3,5\}; \quad \{7,9,11\}; \quad \{13,15,17,19\}; \quad \ldots.$$

Jelölje S_n az n-edik halmaz elemeinek összegét. Igazold, hogy

$$\frac{(n-2)(n+5)}{24(n+1)(n+2)} < \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{S_k} < \frac{(n-2)(n+3)}{12n(n+1)}.$$

dr. Bencze Mihály, Brassó
Spier Tünde, Arad

Megoldás. Az első n halmaz összesen

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$ **(1 pont)**

darab elemet tartalmaz. Mivel az első m darab páratlan szám összege

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2m-1) = m^2,$$

ezért

$$S_n = \frac{(n(n+1))^2}{4} - \frac{(n(n-1))^2}{4} = n^3.$$ **(2 pont)**

Ha $k \geq 3$, akkor rendre az alábbi ekvivalens egyenlőtlenségeket írhatjuk:

$$(k-1)k(k+1) < k^3 < k(k+1)(k+2), \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} < \frac{1}{k^3} < \frac{1}{(k-1)k(k+1)}, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) < \frac{1}{k^3} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k-1)} - \frac{1}{k(k+1)}\right), \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) < \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{S_k} < \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k-1)} - \frac{1}{k(k+1)}\right),$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) < \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{S_k} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{n(n+1)}\right). \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Elvégezve a számításokat és tényezőkre bontva a számlálókat, következik, hogy

$$\frac{(n-2)(n+5)}{24(n+1)(n+2)} < \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{S_k} < \frac{(n-2)(n+3)}{12n(n+1)}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Hivatalból **(1 pont)**

■

5. feladat. Egy (a, b) pozitív egész számokból álló számpárt *dévainak* nevezünk, ha az $\frac{a}{b}$ egy valódi tört és az irreducibilis alakjában a számláló és a nevező páratlan. Igazold, hogy ha az $A = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ halmazból kiválasztunk véletlenszerűen 8 darab számot, akkor biztosan lesz közöttük két olyan szám, ami dévai számpárt alkot! *Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy*

Megoldás. Vegyük észre, hogy az (a, b) pozitív egészekből álló számpár akkor és csak akkor dévai, ha $a = 2^k a_1$ és $b = 2^k b_1$ alakú, ahol $a_1 < b_1$, a_1, b_1 páratlan és $k \in \mathbb{N}$. **(3 pont)**

Legyen

$$O_k = \{a \in A \mid a = 2^{k-1} \cdot p, \text{ ahol } p \text{ páratlan}\},$$

minden $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 7\}$ esetén, vagyis

$$\begin{aligned} O_1 &= \{1, 3, 5, 7, \ldots, 99\}, \\ O_2 &= \{2, 6, 10, 14, \ldots, 98\}, \\ O_3 &= \{4, 12, 20, 28, \ldots, 100\}, \\ O_4 &= \{8, 24, 40, 56, \ldots, 88\}, \\ O_5 &= \{16, 48, 80\}, \\ O_6 &= \{32, 96\}, \\ O_7 &= \{64\}. \end{aligned} \qquad \textbf{(3 pont)}$$

A felsorolt hét halmaz páronként diszjunkt és egyesítésük kiadja az A halmazt. Másrészt, minden $k \in \{1, 2, \ldots, 7\}$ esetén az O_k halmaz elemeiből alkotott számpárok dévai számpárt alkotnak. **(1 pont)**

Ha az A halmazból 8 elemet választunk ki, akkor viszont a skatulyaelv alapján létezik közöttük kettő amely ugyanabban az O_k halmazban van, emiatt a két szám dévai számpárt alkot. (**2 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■

6. feladat. Az ABC háromszögben legyen $BC > AC$ és legyen D a BC oldal egy olyan pontja, amelyre $BD = AC$, és $m(ADC) < 90°$, valamint $m(\widehat{B}) = m(\widehat{DAC}) = 30°$.

a) Igazold, hogy $\sin 54° = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$, esetleg használva, hogy egy hegyesszög szinusza egyenlő a pótszögének koszinuszával!

b) Számítsd ki az ABC háromszög szögeinek mértékét!

Ugron Szabolcs, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. a) Felhasználva, hogy 36° és 54° pótszögek, valamint $36° = 2\cdot 18°$ és $54° = 3\cdot 18°$, ezért

$$\begin{aligned} \sin 36° &= \cos 54°, && \text{(1 pont)}\\ \sin(2\cdot 18°) &= \cos(3\cdot 18°),\\ 2\sin 18°\cos 18° &= 4\cos^3 18° - 3\cos 18°,\\ 2\sin 18° &= 4\cos^2 18° - 3,\\ 2\sin 18° &= 4(1-\sin^2 18°) - 3, && \text{(2 pont)} \end{aligned}$$

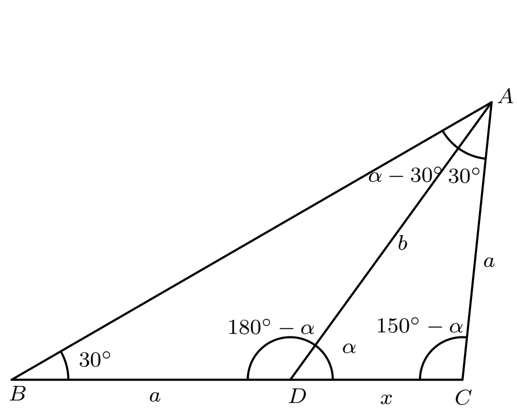
ahonnan a következő másodfokú egyenletet kapjuk a $\sin 18°$-ra

$$4\sin^2 18° + 2\sin 18° - 1 = 0.$$

Innen $\sin 18° = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$, mivel $\sin 18° > 0$. Végezetül

$$\sin 54° = \cos 36° = \cos(2\cdot 18°) = 1 - 2\sin^2 18° = 1 - 2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}. \quad \text{(1 pont)}$$

b)



Tekintsük a mellékelt ábrát és vezessük be a következő jelöléseket: $AC = BD = a$, $AD = b$ és $m(\widehat{ADC}) = \alpha$. Innen kapjuk, hogy

$$m(\widehat{ADB}) = 180^\circ - \alpha, \quad m(\widehat{C}) = 150^\circ - \alpha \quad \text{és} \quad m(\widehat{DAB}) = \alpha - 30^\circ. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Az ADB háromszögben a szinusz-tétel alapján $\dfrac{a}{\sin(\alpha - 30^\circ)} = \dfrac{b}{\sin 30^\circ}$, ahonnan

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha - 30^\circ)}{\sin 30^\circ}. \tag{1}$$

(1 pont)

Felírjuk a szinusz-tételt az ADC háromszögben is $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin(150^\circ - \alpha)}$, ahonnan

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + 30^\circ)}. \tag{2}$$

(1 pont)

Az (1) és (2) összefüggésekből kapjuk, hogy $\dfrac{\sin(\alpha - 30^\circ)}{\sin 30^\circ} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + 30^\circ)}$, ahonnan

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha - 30^\circ) \cdot \sin(\alpha + 30^\circ) &= \sin\alpha^\circ \cdot \sin 30^\circ, \\
\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} \cdot \cos\alpha\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} \cdot \cos\alpha\right) &= \sin\frac{\alpha}{2}, \\
\frac{3}{4} \cdot \sin^2\alpha - \frac{1}{4} \cdot \cos^2\alpha &= \frac{\sin\alpha}{2}, \\
\frac{3}{4} \cdot \sin^2\alpha - \frac{1}{4} \cdot (1 - \sin^2\alpha) &= \frac{\sin\alpha}{2}, \\
\sin^2\alpha - \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha - \frac{1}{4} &= 0, \\
4\sin^2\alpha - 2 \cdot \sin\alpha - 1 &= 0.
\end{aligned}$$

(1 pont)

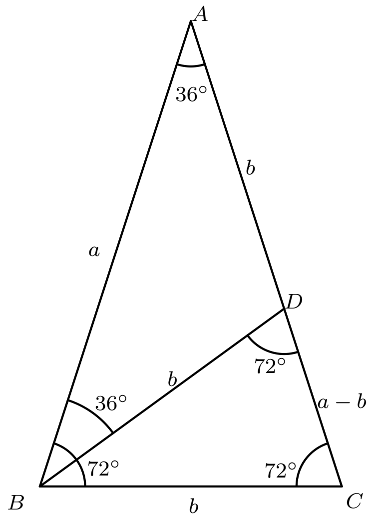
Figyelembe véve, hogy $\sin\alpha > 0$, minden $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$ esetén azt kapjuk, hogy $\sin\alpha = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4}$, ahonnan $\alpha = 54^\circ$. Tehát a háromszög szögei $m(\widehat{A}) = 54^\circ$, $m(\widehat{B}) = 30^\circ$ és $m(\widehat{C}) = 96^\circ$.

(1 pont)

Hivatalból **(1 pont)**

■

Második megoldás az a) alpontra. Tekintsünk egy olyan ABC egyenlő szárú háromszöget, amelyben $m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 72^\circ$ és a $\widehat{B}$ szögfelezője metszi az AC oldalt D-ben.



Vezessük be az $AB = AC = a$, $BC = BD = AD = b$ jelöléseket. Ezek alapján $CD = a - b$. **(2 pont)**

Mivel $ABC_\Delta \sim BCD_\Delta$, azt kapjuk, hogy $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{a-b}$. Ez az összefüggés a $b^2 + ab - a^2 = 0$, b-ben másodfokú egyenlethez vezet, amelynek a gyökei $b_{1,2} = \dfrac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}$. **(1 pont)**
Mivel $b > 0$, következik, hogy

$$b = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \cdot a. \tag{1}$$

Felhasználva a koszinusz-tételt az ABC háromszögben, azt kapjuk, hogy

$$\cos 36° = \frac{2a^2 - b^2}{2a^2}. \tag{2}$$

Az (1) és (2) összefüggések alapján $\cos 36° = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, innen pedig $\sin 54° = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. **(1 pont)**

■

Második megoldás a b) alpontra. Mivel $ADC_\Delta \sim BAC_\Delta$, ezért $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{DC}{AC} = \dfrac{AC}{BC}$. Használva az $AC = a$ és $DC = x$ jelöléseket, következik, hogy $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{x}{a} = \dfrac{a}{a+x}$. **(2 pont)**
Ebből az összefüggésből az $x^2 + ax - a^2 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek a gyökei $x_{1,2} = \dfrac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}$. Mivel $x > 0$, ezért csak $x = \dfrac{-a + a\sqrt{5}}{2}$ lehetséges. **(1 pont)**

Az ADC háromszögben a szinusz-tétel alapján $\dfrac{DC}{\sin A} = \dfrac{AC}{\sin D}$, ezért

$$-a + a\sqrt{5} = \frac{a}{\sin\alpha}.$$ **(1 pont)**

Kifejezve ebből az összefüggésből a $\sin\alpha$-t, azt kapjuk, hogy $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$. Az a) alpont alapján ez viszont azt jelenti, hogy $\alpha = 54°$, mivel $\alpha \in (0, 90°)$. Tehát $m(\widehat{A}) = \alpha = 54°$, $m(\widehat{B}) = 30°$ és $m(\widehat{C}) = 180° - 54° - 30° = 96°$. **(1 pont)**

■