III. országos magyar matematikaolimpia
XXX. EMMV
Déva, 2020. február 11–16.

VII. osztály

1. feladat.

a) Határozd meg az $n \in \mathbb{N}^*$ értékét úgy, hogy $A = \frac{2020}{1\cdot 3} + \frac{2020}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{2020}{(2n-1)(2n+1)}$ természetes szám legyen!

b) Igazold, hogy $\sqrt{(2^{2020} + 3^{2019} + 4^{2020})^{2020} + 2021}$ irracionális szám!

c) Mutasd ki, hogy $\sqrt{2019\cdot 2020 + \sqrt{2019\cdot 2020 + \sqrt{2019\cdot 2020}}} < 2020$.

2. feladat.

a) Az $x \neq -5$, $y \neq -7$ és $z \neq -9$ racionális számokra fennáll a következő aránysor:
$$\frac{x-5}{x+5} = \frac{y-3}{y+7} = \frac{z-1}{z+9}.$$
Számítsd ki az x, y és z értékét, ha $x + y + z = 69$.

b) Az $x \neq -5$, $y \neq -7$ és $z \neq -9$ racionális számokra fennáll a következő egyenlőség:
$$\frac{2020}{x+5} + \frac{2020}{y+7} + \frac{2020}{z+9} = 202.$$
Számítsd ki az $S = \frac{x-5}{x+5} + \frac{y-3}{y+7} + \frac{z-1}{z+9}$ összeg értékét!

3. feladat. Az $ABCD$ konvex négyszögben legyen M és P az AB, illetve CD oldal felezőpontja. Igazold, hogy $AB \parallel CD$ akkor és csak akkor, ha $T_{AMPD} \cdot T_{MPCB} = \frac{T^2_{ABCD}}{4}$.

4. feladat. Adott az $ABCD$ négyzet. Legyen $\mathcal{C}_1$ a B középpontú BA sugarú kör, valamint $\mathcal{C}_2$ a D középpontú DA sugarú kör. Egy az A ponton átmenő tetszőleges egyenes a $\mathcal{C}_1$ és $\mathcal{C}_2$ köröket az E és F pontokban metszi. A C pontból az EF egyenesre húzott merőleges egyenes az EF-et M-ben, a $\mathcal{C}_1$ kört másodszor P-ben metszi. A PA egyenes a CF egyenest N-ben, a $\mathcal{C}_2$ kört másodszor R-ben metszi. Igazold, hogy:

a) az EFC egyenlő szárú derékszögű háromszög;

b) a CPR egyenlő szárú derékszögű háromszög;

c) az $AECR$ négyszög paralelogramma;

d) $EP = FR$.

Megjegyzés: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér. Munkaidő 3 óra.