III. országos magyar matematikaolimpia
XXX. EMMV

Déva, 2020. február 11–16.

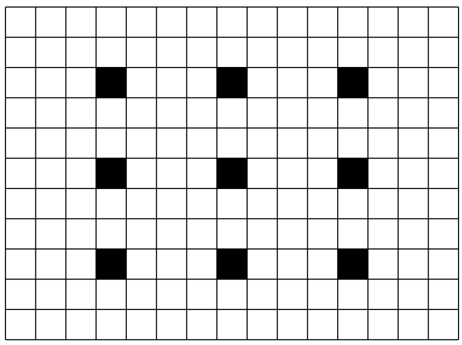
XI-XII. osztály – II. forduló

1. feladat. Ha egy háromszög oldalhosszai $a, b, c > 0$ és a területe T, akkor igazold, hogy

$$T \leq \frac{\sqrt{3}}{12}(ab + bc + ca),$$

és egyenlőség csak az $a = b = c$ esetben áll fenn!

2. feladat. Egy $(3n+2) \times (4n+3)$-es, egységnyi négyzetekből álló táblázat minden harmadik sorának és minden negyedik oszlopának kereszteződésében található négyzetét feketére festettük. Hányféleképpen osztható fel a táblázat a rácsvonalak mentén egyenesekkel úgy, hogy minden darabban legyen legalább egy fekete négyzet? Az egyben hagyott táblázat is egy felosztásnak számít. A kifestett tábla $n = 3$ esetén a következő.



3. feladat. Ha $p > 3$ prímszám, akkor mennyi lehet $(p-1)$ darab számtani haladványban álló egész szám szorzatának a p-vel való osztási maradéka?

4. feladat. Egy háromszög köré írt kör sugara 5 cm és az oldalhosszai, centiméterben kifejezve, természetes számok. Mennyi lehet a háromszög területe?

5. feladat. Egy 2020×2020-as táblázat minden cellájába tetszőlegesen beírjuk a „$+$”, illetve a „$-$” előjelek valamelyikét. Egy lépésben kiválasztunk egy cellát, majd a cella előjelét megváltoztatjuk, a vele egy sorban és oszlopban levő összes celláéval együtt.
Elérhető, hogy véges lépés után a táblázatban minden előjel egyforma legyen? Válaszodat indokold!

6. feladat. Adott egy $ABCD$ körbeírható négyszög és legyen E a négyszög egy olyan belső pontja, amelynek az AB, BC, CD és AD oldalra eső vetülete P, Q, R, illetve S. Igazold, hogy a $PQRS$ négyszög akkor és csakis akkor paralelogramma, ha E az $ABCD$ köré írt kör középpontja!

Megjegyzés: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér. Munkaidő 4 óra.