MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HUNEDOARA
III. OMMO XXX. EMMV

III. országos magyar matematikaolimpia
XXX. EMMV

Déva, 2020. február 11–16.

IX. osztály – II. forduló

1. feladat. A valós számok halmazán oldd meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases}(x^2+2)(y^2+2)=2(y+z)^2\\(y^2+2)(z^2+2)=2(z+x)^2\\(z^2+2)(x^2+2)=2(x+y)^2\end{cases}.$$

2. feladat. Igazold, hogy a 2019, 20192019, …, $\underbrace{20192019\ldots2019}_{2022 \text{ db } 2019\text{-es}}$ számok közül van olyan, amelyik osztható 2021-gyel!

3. feladat. Az $ABCD$ konvex négyszögben legyen M az átlók metszéspontja. Igazold, hogy

a) $\sqrt{AM\cdot BM}+\sqrt{CM\cdot DM}\leq\sqrt{(AM+MC)\cdot(BM+MD)}$;

b) $\sqrt{T_{AMB}}+\sqrt{T_{BMC}}+\sqrt{T_{CMD}}+\sqrt{T_{DMA}}\leq 2\sqrt{T_{ABCD}}$.

4. feladat. Felírjuk a táblára 1-től 2020-ig az összes természetes számot. Letörölünk két olyan számot, melyek különbsége osztható 3-mal, és helyettük a két szám összegét írjuk fel. Ezt az eljárást addig ismételjük, ameddig lehetséges. Igazold, hogy az eljárás végén a táblán pontosan két szám marad!

5. feladat. Az $ABCD$ négyzet oldalain felvesszük az $M\in(CD)$ és $N\in(BC)$ pontokat, melyekre $\dfrac{DM}{MC}=\dfrac{CN}{NB}=k$. Határozd meg a k arány értékét úgy, hogy $\dfrac{T_{BPC}}{T_{ANM}}=\dfrac{9}{13}$, ahol $\{P\}=DN\cap AM$.

6. feladat. Legyen x egy olyan valós szám, amelyre x^3+2x és x^5+3x racionálisak. Igazold, hogy az x racionális szám!

Megjegyzés: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér. Munkaidő 4 óra.